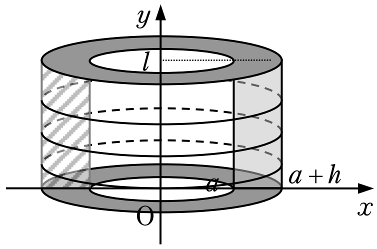
y 軸の周りの回転体の体積

例　$f(x)=x^2(3-x)$ とする。曲線 $y=f(x)$と x 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V について，次の手順で求めてみよう。

(1)　4 点 A$(a,\ 0)$，B$(a+h,\ 0)$，C$(a+h,\ l)$，D$(a,\ l)$ を頂点とする長方形 ABCD を，y 軸の周りに回転してできる回転体の体積を，$a,\ h,\ l$ で表しなさいただし，$a,\ h,\ l$ はすべて正の数とする。

(2)　(1)の結果において，h を十分小さな値と考えて，回転体の体積 V を定積分で表し，その結果を利用して，V を求めなさい。

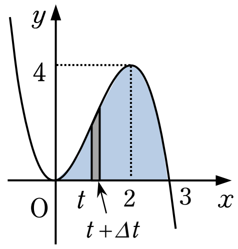
〔解答〕



(1)　半径 $a+h$，高さが l の円柱から，半径 a，高さが l の円柱がくり抜かれている形状だから，その体積 V_0 は

$$V_0 =\pi(a+h)^2\times l-\pi a^2\times l=\pi(2ah+h^2)l$$

(2)　区間 $[\ x,\ \Delta x\ ]$ において，不等式 $0\leqq y\leqq f(x)$ で表される部分を y 軸のまわりに回転してできる体積の増分ΔV は，(1) において，$h\to 0$ のとき，$\dfrac{h^2}{h}\ \to 0$ であることを考慮すると，



$$\Delta V=2\pi xf(x)\,\Delta x$$

であることから，求める回転体の体積 V は，

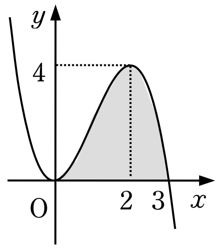
$$V=2\pi\int_0^3 xf(x)dx$$

で表される。

よって，

$$V=2\pi\int_0^3 x\cdot x^2(3-x)dx =2\pi\int_0^3(3x^3-x^4)dx=2\pi\Big[\ \frac{3}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5\Big]_0^3=2\pi\Big(\frac{3^5}{4}-\frac{3^5}{5}\Big)=\frac{243}{10}\pi$$

$f(x)=x^2(3-x)$ とする。曲線 $y=f(x)$と x 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V について考えてみよう。



曲線 $y=f(x)$の $0\leqq x\leqq 2$ の部分を $x=g(y)$，$2\leqq x\leqq 3$ の部分を $x=h(y)$ とする。回転体の体積 V は，

$$V=\pi\int_0^4\{h(y)\}^2dy-\pi\int_0^4\{g(y)\}^2dy$$

ここで，$h(y)=t$，$g(y)=u$ と置換すると，$y=f(t)$，$y=f(u)$ である。

$dy=f'(t)dt=(6t-3t^2)dt$，$dy=f'(u)du=(6u-3u^2)du$

y と t。y と u の対応関係は右の通り。

y	$0\to 4$
t	$0\to 2$

y	$0\to 4$
u	$3\to 2$

よって，

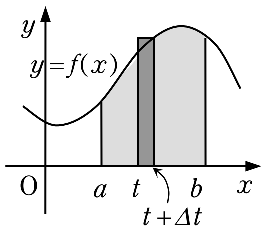
$$V =\pi\int_3^2 u^2(6u-3u^2)du-\pi\int_0^2 t^2(6t-3t^2)dt$$

$$=-\pi\int_2^3 x^2(6x-3x^2)dx-\pi\int_0^2 x^2(6x-3x^2)dx=-\pi\int_0^3(6x^3-3x^4)dx \qquad \cdots\cdots ①$$

$$=-\pi\Big[\ \frac{3}{2}x^4-\frac{3}{5}x^5\Big]_0^3=-\pi\Big(\frac{3^5}{2}-\frac{3^6}{5}\Big)=\frac{243}{10}\pi$$

この計算からわかるように，y 軸のまわりの回転体の体積であるが，x についての定積分として計算できる。一般には，次のように計算することができる。

> a, b を $0 \leqq a < b$ を満たす定数とし，区間 $a \leqq x \leqq b$ において $f(x) \geqq 0$ とする。
> 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V は
> $$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$
> で得られる。



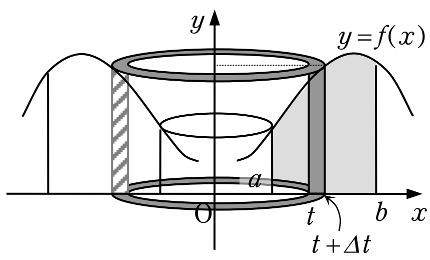
（証明）曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a,\ x=t$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。

$\Delta t>0$ のとき，区間 $[t,\ t+\Delta t]$ における $f(x)$ の最大値を M_t，最小値を m_t とする。t の増分 Δt に対する $V(t)$ の増分 $\Delta V=V(t+\Delta t)-V(t)$ を，高さ $M_t,\ m_t$ の円筒の体積と比較して

$$\pi\{(t+\Delta t)^2-t^2\}m_t \leqq \Delta V \leqq \pi\{(t+\Delta t)^2-t^2\}M_t$$

$$\pi\{2t\Delta t+(\Delta t)^2\}m_t \leqq \Delta V \leqq \pi\{2t\Delta t+(\Delta t)^2\}M_t$$

$$\therefore\quad \pi(2t+\Delta t)m_t \leqq \frac{\Delta V}{\Delta t} \leqq \pi(2t+\Delta t)M_t$$



ここで，$\Delta t \to +0$ とすると，$M_t \to f(t),\ m_t \to f(t)$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{\Delta t\to+0}\frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t}=2\pi tf(t)$$

$\Delta t<0$ のときも成立する。　　　　$\therefore\quad V'(x)=2\pi xf(x)$

よって，$V(x)$ は $2\pi xf(x)$ の不定積分の 1 つだから，

$$\int_a^b 2\pi xf(x)dx=\Big[V(t)\Big]_a^b=V(b)-V(a)$$

$V(a)=0$，$V(b)=V$ だから，$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$ ∎

最初に扱った $f(x)=x^2(3-x)$ についてこの式を用いて体積 V を計算すると，

$$V=2\pi\int_0^3 x(3x^2-x^3)dx=2\pi\Big[\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5\Big]_0^3=\frac{243}{10}\pi$$

となる。実は，①は

$$V=-\pi\int_0^3(6x^3-3x^4)dx=-\pi\int_0^3 x^2f'(x)dx$$

であり，ここで部分積分法を用いると，

$$V=-\pi\Big[x^2f(x)\Big]_0^3+\pi\int_0^3 2xf(x)dx=2\pi\int_0^3 xf(x)dx$$

となる。式の求め方は異なっているが，最後にできる式は同じである。